BINOMNA (Njutnova) FORMULA

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \ldots + \binom{n}{n}x^0 y^n$$

$\binom{n}{0},\binom{n}{1},\ldots,\binom{n}{n}$ **-BINOMNI KOEFICIJENTI**

(k+1)- član u razvoju binoma: $T_{k+1} = \binom{n}{k}x^{n-k}y^k$

OSOBINE BINOMNIH KOEFICIJENATA:

(1) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (2) $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$ (3) $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} = \binom{n-m+k}{k}$

<u>PASKALOV TROUGAO</u>

-binomni koeficijenti u razvoju $(x+y)^n$

n=0 1
n=1 1 1
n=2 1 2 1
n=3 1 3 3 1
n=4 1 4 6 4 1
n=5 1 5 10 10 5 1
.....

ZADACI:

1.Razviti binom:

a) $(x+2)^6$

rešenje:

$$(x+2)^6 = \binom{6}{0}x^6 + \binom{6}{1}x^5\cdot 2^1 + \binom{6}{2}x^4\cdot 2^2 + \binom{6}{3}x^3\cdot 2^3 + \binom{6}{4}x^2\cdot 2^4 + \binom{6}{5}x^1\cdot 2^5 + \binom{6}{6}\cdot 2^6 =$$

$$= 1\cdot x^6 + 6\cdot x^5\cdot 2 + \frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}x^4\cdot 4 + \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}x^3\cdot 8 + \binom{6}{2}x^2\cdot 16 + \binom{6}{1}x^1\cdot 32 + \binom{6}{0}\cdot 64 =$$

$$= x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64$$

b) $(x-1)^5$

rešenje:

$$(x-1)^5 = \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4(-1)^1 + \binom{5}{2}x^3(-1)^2 + \binom{5}{3}x^2(-1)^3 + \binom{5}{4}x^1(-1)^4 + \binom{5}{5}(-1)^5 =$$

$$= 1\cdot x^5 + 5x^4(-1) + \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}x^3\cdot 1 + \binom{5}{2}x^2(-1) + \binom{5}{1}x\cdot 1 + \binom{5}{0}(-1) =$$

$$= x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$$

c) $(2x+y)^4$

rešenje:

$$(2x+y)^4=\binom{4}{0}(2x)^4+\binom{4}{1}(2x)^3y+\binom{4}{2}(2x)^2y^2+\binom{4}{3}(2x)^1y^3+\binom{4}{4}y^4=$$

$$=1\cdot 16x^4+4\cdot 8x^3y+\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}4x^2y^2+\binom{4}{1}2xy^3+\binom{4}{0}y^4=$$

$$=16x^4+32x^3y+24x^2y^2+8xy^3+y^4$$

2.Odrediti:

a) četvrti član u razvoju binoma $\left(x^2-y^2\right)^{11}$

rešenje:

$$T_4=\binom{11}{3}\left(x^2\right)^8\left(-y^2\right)^3=\frac{11\cdot 10\cdot 9}{3\cdot 2\cdot 1}x^{16}\left(-y^6\right)=-165x^{16}y^6$$

b)šesti član u razvoju binoma $(x+y)^{15}$

rešenje:

$$T_6=\binom{15}{5}x^{10}y^5=\frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}x^{10}y^5=3003x^{10}y^5$$

c) peti član u razvoju binoma $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^{12}$

rešenje:

$$T_5=\binom{12}{4}\left(\sqrt{x}\right)^8\left(-\sqrt{y}\right)^4=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}x^4y^2=495x^4y^2$$

d) binomni koeficijent uz peti član u razvoju binoma $\left(2\sqrt{x}-1\right)^8$

rešenje:

$$\binom{8}{4}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=70$$

Binomni koeficijent uz peti član je 70.

e) koeficijent uz peti član u razvoju binoma $\left(2\sqrt{x}-1\right)^8$

rešenje:

$$T_5=\binom{8}{4}\left(2\sqrt{x}\right)^4(-1)^4=70\cdot 16x^2\cdot 1=1120x^2$$

Koeficijent uz peti član je 1120.

3.U razvoju sledećih binoma odrediti član koji ne sadrži x

a) $\left(\sqrt[4]{a^2x}+\sqrt[5]{\frac{1}{ax^2}}\right)^{13}$

rešenje:

$$T_{k+1}=\binom{13}{k}\left(\sqrt[4]{a^2x}\right)^{13-k}\left(\sqrt[5]{\frac{1}{ax^2}}\right)^{k}=\binom{13}{k}\left(a^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{4}}\right)^{13-k}\left(a^{\frac{-1}{5}}\cdot x^{-\frac{-2}{5}}\right)^{k}=\binom{13}{k}a^{\frac{13-k}{2}}\cdot x^{\frac{13-k}{4}}\cdot a^{\frac{-k}{5}}\cdot x^{\frac{-2k}{5}}$$

Za član koji ne sadrži x važi : $x^{\frac{13-k}{4}}\cdot x^{\frac{-2k}{5}}=x^0$

$$\frac{13-k}{4}+\frac{-2k}{5}=0\quad /\cdot 20$$

$$5(13-k)-8k=0$$

$$65-5k-8k=0$$

$$65=13k$$

$$k=5$$

Član koji ne sadrži x je 6.član:

$$T_6=\binom{13}{5}\left(\sqrt[4]{a^2x}\right)^{13-5}\left(\sqrt[5]{\frac{1}{ax^2}}\right)^{5}=\binom{13}{5}\left(a^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{4}}\right)^{8}\left(a^{\frac{-1}{5}}\cdot x^{-\frac{-2}{5}}\right)^{5}=\binom{13}{5}a^4\cdot x^2\cdot a^{-1}\cdot x^{-2}=1287a^3$$

b) $\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x^{-1}}\right)^{15}$

rešenje:

$$T_{k+1}=\binom{15}{k}\left(\sqrt[3]{x}\right)^{15-k}\left(\sqrt{x^{-1}}\right)^{k}=\binom{15}{k}\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{15-k}\left(x^{-\frac{-1}{2}}\right)^{k}=\binom{15}{k}x^{\frac{15-k}{3}}\cdot x^{\frac{-k}{2}}$$

Za član koji ne sadrži x važi : $x^{\frac{15-k}{3}}\cdot x^{\frac{-k}{2}}=x^0$

$$\frac{15-k}{3}+\frac{-k}{2}=0\quad /\cdot 6$$

$$2(15-k)-3k=0$$

$$30-2k-3k=0$$

$$30=5k$$

$$k=6$$

Član koji ne sadrži x je 7.član: $T_7=\binom{15}{6}\left(\sqrt[3]{x}\right)^{15-6}\left(\sqrt{x^{-1}}\right)^{6}=\binom{15}{6}\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{9}\left(x^{-\frac{-1}{2}}\right)^{6}=\binom{15}{6}x^{3}\cdot x^{-3}=\binom{15}{6}$

c) $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n$ **ako je zbir koeficijenata prva tri člana jednak 46**

rešenje:

U ovom slučaju binomni koeficijent=koeficijent

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=46$$

$$1+n+\frac{n(n-1)}{2}=46 \quad /\cdot 2$$

$$2+2n+n^2-n=92$$

$$n^2+n-90=0$$

$$n_1=-10(\perp \text{ jer}: n\in N)$$

$$n_2=9$$

$$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n=\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^9$$

$$T_{k+1}=\binom{9}{k}\left(x^2\right)^{9-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k=\binom{9}{k}x^{18-2k}x^{-k}$$

Za član koji ne sadrži x važi : $x^{18-2k}\cdot x^{-k}=x^0$

$$18-2k-k=0$$

$$18-3k=0$$

$$18=3k$$

$$k=6$$

Član koji ne sadrži x je 7.član: $T_7=\binom{9}{6}\left(x^2\right)^{9-6}\left(\frac{1}{x}\right)^6=\binom{9}{3}x^6\frac{1}{x^6}=\binom{9}{3}=84$

d) $\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{y}{x}\right)^n$ **ako je binomni koeficijent trećeg člana za 5 veći od binomnog koeficijenta drugog člana**

rešenje:

$$\binom{n}{2}=\binom{n}{1}+5$$

$$\frac{n(n-1)}{2}=n+5 \quad /\cdot 2$$

$$n^2-n=2n+10$$

$$n^2-3n-10=0$$

$$n_1=-2(\perp \text{ jer}: n\in N)$$

$$n_2=5$$

$$\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{y}{x}\right)^n=\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{y}{x}\right)^5$$

$$T_{k+1}=\binom{5}{k}\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^{5-k}\left(\frac{y}{x}\right)^k=\binom{5}{k}\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{5-k}\cdot y^k\cdot x^{-k}=\binom{5}{k}x^{\frac{10-2k}{3}}\cdot y^k\cdot x^{-k}$$

Za član koji ne sadrži x važi : $x^{\frac{10-2k}{3}}\cdot x^{-k}=x^0$

$$\frac{10-2k}{3}-k=0\quad /\cdot 3$$

$$10-2k-3k=0$$

$$10=5k$$

$$k=2$$

Član koji ne sadrži x je 3.član: $T_3=\binom{5}{2}\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^{5-2}\left(\frac{y}{x}\right)^2=\binom{5}{2}\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^3\cdot\frac{y^2}{x^2}=10x^2\frac{y^2}{x^2}=10y^2$

e) $\left(x^2+\frac{a}{x}\right)^n$ ako su binomni koeficijenti četvrtog i trinaestog člana jednaki

rešenje:

$$\binom{n}{3}=\binom{n}{12}\Rightarrow(k=3\wedge n-k=12)\Rightarrow n-3=12\Rightarrow n=15$$

$$\left(x^2+\frac{a}{x}\right)^n=\left(x^2+\frac{a}{x}\right)^{15}$$

$$T_{k+1}=\binom{15}{k}\left(x^2\right)^{15-k}\left(\frac{a}{x}\right)^k=\binom{15}{k}x^{30-2k}\cdot a^k\cdot x^{-k}$$

Za član koji ne sadrži x važi : $x^{30-2k}\cdot x^{-k}=x^0$

$$30-2k-k=0$$

$$30-3k=0$$

$$30=3k$$

$$k=10$$

Član koji ne sadrži x je 11.član: $T_{11}=\binom{15}{10}\left(x^2\right)^{15-10}\left(\frac{a}{x}\right)^{10}=\binom{15}{5}x^{10}\cdot\frac{a^{10}}{x^{10}}=3003a^{10}$

f) $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$ **ako se koeficijenti petog i trećeg člana odnose kao 7:2**

rešenje:

$\binom{n}{4}:\binom{n}{2}=7:2$

$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\cdot3\cdot2\cdot1}:\frac{n(n-1)}{2}=7:2$

$2\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=7\frac{n(n-1)}{2}\quad /:n(n-1)$

$\frac{(n-2)(n-3)}{4\cdot3}=\frac{7}{2}\quad /\cdot12$

$(n-2)(n-3)=7\cdot6$

$n-2=7 \Rightarrow n=9$

$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^9$

$T_{k+1}=\binom{9}{k}\left(\sqrt{x}\right)^{9-k}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^k=\binom{9}{k}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{9-k}\cdot\left(x^{\frac{-2}{3}}\right)^k=\binom{9}{k}x^{\frac{9-k}{2}}\cdot x^{\frac{-2k}{3}}$

Za član koji ne sadrži x važi : $x^{\frac{9-k}{2}}\cdot x^{\frac{-2k}{3}}=x^0$

$\frac{9-k}{2}+\frac{-2k}{3}=0\quad /\cdot6$

$27-3k-4k=0$

$27=7k$

$k=\frac{27}{7}(\perp \text{ jer}: k\in N)$

Ne postoji član koji ne sadrži x.

4.Koji član u razvoju binoma $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}+\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21}$ sadrži a i b sa istim stepenom?

$T_{k+1}=\binom{21}{k}\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}\right)^{21-k}\left(\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^k=\binom{21}{k}\left(\left(\frac{a}{b^{1/2}}\right)^{1/3}\right)^{21-k}\cdot\left(\left(\frac{b}{a^{1/3}}\right)^{1/2}\right)^k=$

$=\binom{21}{k}\left(a^{1/3}b^{-1/6}\right)^{21-k}\cdot\left(b^{1/2}a^{-1/6}\right)^k=\binom{21}{k}a^{\frac{21-k}{3}}\cdot b^{\frac{-21+k}{6}}\cdot b^{\frac{k}{2}}\cdot a^{\frac{-k}{6}}=$

Ako a I b imaju isti eksponent: : $a^{\frac{21-k}{3}}\cdot a^{\frac{-k}{6}}=b^{\frac{-21+k}{6}}\cdot b^{\frac{k}{2}}$

$$\frac{21-k}{3}+\frac{-2k}{6}=\frac{-21+k}{6}+\frac{k}{2} \quad /\cdot 6$$
$$42-2k-2k=-21+k+3k$$
$$63=7k$$
$$k=9$$

Deseti član.

5.Odrediti:

a) srednji član u razvoju binoma $\left(a^{-2}\sqrt{a}-\sqrt[5]{\frac{a^{-2}}{\sqrt{a}}}\right)^m$ ako se koeficijenti petog i trećeg člana odnose kao 14:3

rešenje:

$$\left(a^{-2}\sqrt{a}-\sqrt[5]{\frac{a^{-2}}{\sqrt{a}}}\right)^m=\left(a^{-2}\cdot a^{1/2}-\left(a^{-2}\cdot a^{-1/2}\right)^{1/5}\right)^m=\left(a^{-3/2}-\left(a^{-5/2}\right)^{1/5}\right)^m=\left(a^{\frac{-3}{2}}-a^{\frac{-1}{2}}\right)^m$$

$$T_5=\binom{m}{4}\left(a^{-3/2}\right)^{m-4}\left(-a^{-1/2}\right)^4=\binom{m}{4}a^{\frac{-3m+12}{2}}a^{-2} \Rightarrow \text{ koeficijent 5.člana je } \binom{m}{4}$$

$$T_3=\binom{m}{2}\left(a^{-3/2}\right)^{m-2}\left(-a^{-1/2}\right)^2=\binom{m}{4}a^{\frac{-3m+6}{2}}a^{-1} \Rightarrow \text{ koeficijent 3.člana je } \binom{m}{2}$$

$$\binom{m}{4}:\binom{m}{2}=14:3$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}:\frac{m(m-1)}{2\cdot 1}=14:3$$

$$3\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=14\frac{m(m-1)}{2\cdot 1} \quad /:m(m-1)$$

$$\frac{(m-2)(m-3)}{8}=7$$

$$(m-2)(m-3)=8\cdot 7$$

$$m-2=8 \Rightarrow m=10$$

Za m=10 binom ima 11 članova; srednji član je 6.član (k=5):

$$T_6=\binom{10}{5}\left(a^{-3/2}\right)^5\left(-a^{-1/2}\right)^5=-\binom{10}{5}a^{\frac{-15}{2}}a^{\frac{-5}{2}}=-\binom{10}{5}a^{-\frac{20}{2}}=-\binom{10}{5}a^{-10}=-\binom{10}{5}\frac{1}{a^{10}}$$

b) peti član u razvoju binoma $\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)^n$ ako je koeficijent trećeg člana jednak 78

rešenje:

$T_3=\binom{n}{2}\left(\sqrt{1+x}\right)^{n-2}\left(-\sqrt{1-x}\right)^2=\binom{n}{2}\left(\sqrt{1+x}\right)^{n-2}\left(\sqrt{1-x}\right)^2$ => koeficijent 3.člana je $\binom{n}{2}$

$\binom{n}{2}=78$

$\frac{n(n-1)}{2\cdot 1}=78$

$n(n-1)=156=13\cdot 12 \Rightarrow n=13$

Peti član:

$T_5=\binom{13}{4}\left(\sqrt{1+x}\right)^9\left(-\sqrt{1-x}\right)^4=\binom{13}{4}\sqrt{(1+x)^9}(1-x)^2=715\sqrt{(1+x)}(1+x)^4(1-x)^2$

c) članove u razvoju binoma $\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}\right)^5$ koji nisu iracionalni

rešenje:

$T_{k+1}=\binom{5}{k}\left(\sqrt[3]{3}\right)^{5-k}\left(\sqrt{2}\right)^k=\binom{5}{k}3^{\frac{5-k}{3}}\cdot 2^{\frac{k}{2}}$

Da bi članovi bili racionalni eksponenti: $\frac{5-k}{3}$ I $\frac{k}{2}$ moraju biti celi brojevi.

(k=0,1,2,3,4,5)

Zbog $\frac{k}{2}$-ceo broj => k je paran broj tj k=0,2,4.

Zamenom u $\frac{5-k}{3}$ dobijamo da je to ceo broj samo za k=2.

Jedini racinalan član u razvoju binoma je 3.član: $T_3=\binom{5}{2}\left(\sqrt[3]{3}\right)^3\left(\sqrt{2}\right)^2=10\cdot 3\cdot 2=60$

d) racionalne članove u razvoju binoma $\left(1+\sqrt[4]{2}\right)^{15}$

rešenje:

$T_{k+1}=\binom{15}{k}(1)^{15-k}\left(\sqrt[4]{2}\right)^k=\binom{15}{k}2^{\frac{k}{4}}$

Da bi članovi bili racionalni eksponent $\frac{k}{4}$ mora biti ceo broj.

Zbog $\frac{k}{4}$-ceo broj => k je broj deljiv sa 4 => k=0, k=4,k=8 I k=12.

Racionalni članovi su: prvi, peti, deveti i trinaesti.

$$T_1=\binom{15}{0}(1)^{15}\left(\sqrt[4]{2}\right)^0=1$$

$$T_5=\binom{15}{4}(1)^{11}\left(\sqrt[4]{2}\right)^4=\binom{15}{4}\cdot 2=2730$$

$$T_9=\binom{15}{8}(1)^{7}\left(\sqrt[4]{2}\right)^8=\binom{15}{7}\cdot 2^2=25740$$

$$T_{13}=\binom{15}{12}(1)^{3}\left(\sqrt[4]{2}\right)^{12}=\binom{15}{3}\cdot 2^3=3640$$

6.Odrediti x tako da:

a) 4. član u razvoju binoma $\left(\sqrt{x^{\frac{1}{\log x+1}}}+\sqrt[12]{x}\right)^6$ **bude jednak 200**

rešenje:

$$T_4=\binom{6}{3}\left(\sqrt{x^{\frac{1}{\log x+1}}}\right)^3\left(\sqrt[12]{x}\right)^3=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}\left(\left(x^{\frac{1}{\log x+1}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^3\left(x^{\frac{1}{12}}\right)^3=20x^{\frac{3}{2(\log x+1)}}\cdot x^{\frac{1}{4}}=20x^{\frac{3}{2(\log x+1)}+\frac{1}{4}}$$

$$20x^{\frac{3}{2(\log x+1)}+\frac{1}{4}}=200 \quad /:20$$

$$x^{\frac{3}{2(\log x+1)}+\frac{1}{4}}=10 \quad /\log$$

$$\log x^{\frac{3}{2(\log x+1)}+\frac{1}{4}}=\log 10$$

$$\left(\frac{3}{2(\log x+1)}+\frac{1}{4}\right)\log x=1$$

Smena: $\log x=t$

$$\left(\frac{3}{2(t+1)}+\frac{1}{4}\right)t=1$$

$$\frac{3t}{2(t+1)}+\frac{t}{4}=1 \quad /\cdot 4(t+1)$$

$$6t+t^2+t=4t+4$$

$$t^2+3t-4=0$$

$$t_1=-4$$

$$t_2=1$$

(1) $\log x=-4\Rightarrow x=10^{-4}=0{,}0001$

(2) $\log x = 1 \Rightarrow x = 10$

b) 3. član u razvoju binoma $\left(x + x^{\log x}\right)^5$ bude 1000000

rešenje:

$$T_3 = \binom{5}{2} x^3 \left(x^{\log x}\right)^2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} x^3 x^{2\log x} = 10x^{3+2\log x}$$

$$10x^{3+2\log x} = 1000000 \;\; /:10$$

$$x^{3+2\log x} = 100000 \;\; /\log$$

$$\log x^{3+2\log x} = \log 10^5$$

$$(3 + 2\log x)\log x = 5\log 10$$

Smena: $\log x = t$

$$(3 + 2t)t = 5$$

$$2t^2 + 3t - 5 = 0$$

$$t_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{4} = \frac{-3 \pm 7}{4}$$

$$t_1 = -\frac{5}{2}$$

$$t_2 = 1$$

(1) $\log x = -\frac{5}{2} \Rightarrow x = 10^{\frac{-5}{2}} = \sqrt{10^{-5}} = \frac{1}{\sqrt{10^5}} = \frac{1}{10^2\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{1000}$

(2) $\log x = 1 \Rightarrow x = 10$

c) 6. član u razvoju binoma $\left(2^{\log_2 \sqrt{9^{x-1}+7}} + 2^{-\frac{1}{5}\log_2\left(3^{x-1}+1\right)}\right)^7$ bude jednak 84.

rešenje:

$$T_3 = \binom{7}{5} x^3 \left(2^{\log_2 \sqrt{9^{x-1}+7}}\right)^2 \left(2^{\frac{-1}{5}\log_2\left(3^{x-1}+1\right)}\right)^5 = \binom{7}{2} 2^{2\log_2 \sqrt{9^{x-1}+7}} \cdot 2^{-\log_2\left(3^{x-1}+1\right)} =$$

$$= \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} \cdot 2^{2\log_2 \sqrt{9^{x-1}+7} - \log_2\left(3^{x-1}+1\right)} = 21 \cdot 2^{2\log_2 \sqrt{9^{x-1}+7} - \log_2\left(3^{x-1}+1\right)}$$

$$21 \cdot 2^{2\log_2 \sqrt{9^{x-1}+7} - \log_2\left(3^{x-1}+1\right)} = 84 \;\; /:21$$

$$2^{2\log_2 \sqrt{9^{x-1}+7} - \log_2\left(3^{x-1}+1\right)} = 4 \;\; /\log_2$$

$$\log_2 2^{2\log_2 \sqrt{9^{x-1}+7} - \log_2\left(3^{x-1}+1\right)} = \log_2 4$$

$$\left(2\log_2\left(9^{x-1} + 7\right)^{1/2} - \log_2\left(3^{x-1} + 1\right)\right)\log_2 2 = \log_2 4$$

$$\log_2\left(9^{x-1}+7\right)-\log_2\left(3^{x-1}+1\right)=\log_2 4$$
$$\log_2\frac{\left(9^{x-1}+7\right)}{\left(3^{x-1}+1\right)}=\log_2 4$$
$$\frac{\left(9^{x-1}+7\right)}{\left(3^{x-1}+1\right)}=4$$
$$9^{x-1}+7=4\left(3^{x-1}+1\right)$$
$$\frac{9^x}{9}+7=4\left(\frac{3^x}{3}+1\right)$$
$$\frac{3^{2x}}{9}+7=4\left(\frac{3^x}{3}+1\right)$$

Smena: $3^x=t>0$

$$\frac{t^2}{9}+7=\frac{4t}{3}+4 \quad /\cdot 9$$
$$t^2+63=12t+36$$
$$t^2-12t+27=0$$
$$t_1=9$$
$$t_2=3$$

(1) $3^x=9 \Rightarrow 3^x=3^2 \Rightarrow x=2$

(2) $3^x=3 \Rightarrow x=1$

d) 4. član u razvoju binoma $\left(10^{\log\sqrt{x}}+10^{-\frac{1}{\log x}}\right)^7$ jednak 3500000

rešenje:

$$T_4=\binom{7}{3}\left(10^{\log\sqrt{x}}\right)^4\left(10^{\frac{-1}{\log x}}\right)^3=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 10^{4\log x^{1/2}}\cdot 10^{\frac{-3}{\log x}}=35\cdot 10^{2\log x-\frac{3}{\log x}}$$
$$35\cdot 10^{2\log x-\frac{3}{\log x}}=3500000 \quad /:35$$
$$10^{2\log x-\frac{3}{\log x}}=100000 \quad /\log$$
$$\log 10^{2\log x-\frac{3}{\log x}}=\log 100000$$
$$\left(2\log x-\frac{3}{\log x}\right)\log 10=\log 10^5$$

$$2\log x - \frac{3}{\log x} = 5$$

Smena: $\log x = t$

$$2t - \frac{3}{t} = 5 \quad /\cdot t$$

$$2t^2 - 3 = 5t$$

$$2t^2 - 5t - 3 = 0$$

$$t_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \frac{5 \pm 7}{4}$$

$$t_1 = 3 \qquad t_2 = -\frac{1}{2}$$

(1) $\log x = 3 \Rightarrow x = 10^3 = 1000$

(2) $\log x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$

7.Ako je u razvijenom obliku binoma $(x+y)^n$, drugi član 240, treći 720 a četvrti 1080 odrediti x,y i n.

rešenje:

$$T_2 = \binom{n}{1} x^{n-1} y = n x^{n-1} y$$

$$n x^{n-1} y = 240$$

$$T_3 = \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 = \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} y^2$$

$$\frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} y^2 = 720 \Rightarrow n(n-1) x^{n-2} y^2 = 1440$$

$$T_4 = \binom{n}{3} x^{n-3} y^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} x^{n-3} y^3$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} x^{n-3} y^3 = 1080 \Rightarrow n(n-1)(n-2) x^{n-3} y^3 = 6480$$

SISTEM JEDNAČINA:

$n x^{n-1} y = 240$ (1)

$n(n-1) x^{n-2} y^2 = 1440$ (2)

$n(n-1)(n-2) x^{n-3} y^3 = 6480$ (3)

$$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \frac{n(n-1) x^{n-2} y^2}{n x^{n-1} y} = \frac{1440}{240} \Rightarrow (n-1)\frac{y}{x} = 6 \quad (4)$$

$$\frac{(3)}{(2)} \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2) x^{n-3} y^3}{n(n-1) x^{n-2} y^2} = \frac{6480}{1440} \Rightarrow (n-2)\frac{y}{x} = \frac{9}{2} \quad (5)$$

Iz (4) i(5):

$$(n-2)\frac{y}{x}=\frac{9}{2}$$
$$(n-1)\frac{y}{x}-\frac{y}{x}=\frac{9}{2}$$
$$6-\frac{y}{x}=\frac{9}{2}$$
$$\frac{y}{x}=\frac{3}{2}$$
Zamenom u (4)
$$(n-1)\frac{3}{2}=\frac{9}{2} \Rightarrow n-2=3 \Rightarrow n=5$$

$$5x^4y=240$$
$$x^4y=48$$
$$x^4\cdot\frac{3}{2}x=48$$
$$x^5=48\cdot\frac{2}{3}$$
$$x^5=32=2^5$$
$$x=2$$
$$\frac{y}{x}=\frac{3}{2}$$
$$\frac{y}{2}=\frac{3}{2}$$
$$y=3$$

8. Dokazati da je zbir svih binomnih koeficijenata u razvoju binoma jednak 2^n.

Rešenje:
Zbir binomnih koeficijenata je :
$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}$$
Ovaj zbir se dobija razvojem binoma $(1+1)^n$.
Odnosno
$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=(1+1)^n=2^n$$