

СТЕПЕНОВАЊЕ

Израчунати:

1. $\left[1.5 : 3\frac{1}{5} - 12.234\right]^0$
2. $1\frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$
3. $\frac{5^{n+2} \cdot 5^{n+3}}{5^{n+6}}$
4. $0,5^{-1} + 0,25^{-2} + 0,125^{-3}$
5. $1^{-1} + 2^{-2} + 3^{-3} + (-1)^{-1} + (-2)^{-2} + (-3)^{-3}$
6. $\left[\left(1\frac{1}{3}\right)^{-1} - 2^{-2}\right]^{-3}$
7. $\left[\left(\frac{3}{7} + \frac{2}{3} : \frac{3}{5}\right) : \left(13 + \frac{6}{7}\right)\right]^{-2}$
8. Упрости изразе: а) $(a^{-3})^2 \cdot (a^{-1})^{-2}$ б) $(y^{-4})^3 : (y^3)^{-2}$
9. Шта је веће: а) 2^{24} или 3^{16} б) $0,5^7$ или $\left(\frac{1}{2}\right)^8$

Израчунати:

10. $\frac{2x^2}{5y^{-2}} : \frac{6x^{-3}}{10y^{-1}}$
11. $\left(\frac{a}{b}\right)^5 : \left(\frac{a}{b}\right)^{-4}$
12. $\frac{1-x^{-1}}{1+x^{-1}}$
13. $\frac{(a-b)^6}{(b-a)^5}$

Упростити израз:

14. $\frac{2^6 \cdot a^{-2} \cdot b^{-3} \cdot c^4}{8^2 \cdot b \cdot a^{-5} \cdot c^{-1}}$
15. $\left[\left(\frac{2a^{-2}}{3ab^{-3}}\right)^{-4} : \left(\frac{4a^{-2}}{3b^{-3}}\right)^{-3}\right] \cdot \frac{1}{12a^5b^{-2}}$
16. $\left[\left(\frac{5x^{-5}}{2y^{-2}}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{y^{-1}}{5x^{-1}}\right)^{-3}\right] : 10x^2y^{-3}$
17. $\frac{(x+y)^3 \cdot (y+x)^4}{(x^2 + 2xy + y^2)^3}$
18. $[x^{-1} + y^{-1}]^{-1} : [x^{-1} - y^{-1}]^{-1}$, $(x, y \neq 0, x \neq \pm y)$
19. $\left[\frac{2^n + 2^{-n}}{2}\right]^2 - \left[\frac{2^n - 2^{-n}}{2}\right]^2$
20. $\left(\frac{3 \cdot a^{-3}}{5 \cdot b^{-2}}\right)^{-3} : \left(\frac{9 \cdot a^{-1}}{5 \cdot b^{-3}}\right)^{-3} \cdot \frac{a^{-6}}{45}$

21. Израчунати: $\frac{1+x^{-1}}{1-x^{-1}} \cdot \left(1 - \frac{2x-1}{x}\right)$, ако је $x = \left(\frac{2}{b-1}\right)^{-1}$, $b \neq 1 \wedge b \neq 3$

Упростити израз:

22. $\frac{2^{-2} \cdot a^6 \cdot y^{-8}}{b^{-4} \cdot x^7} \cdot \left(2 \cdot \frac{a^8 \cdot y^{-16}}{b^{10}}\right) : \left(\left(\frac{a^{-4} \cdot y^{12}}{b^{16} \cdot x^{-8}} : \frac{x^{15} \cdot y^{60}}{a^{30}}\right) \cdot a^6\right); a, b, x, y \neq 0$
23. $\frac{m^{-1} - n^{-1}}{m^{-3} + n^{-3}} : \frac{m^2 n^2}{(m+n)^2 - 3mn} \cdot \left(\frac{m^2 - n^2}{mn}\right)^{-1}; m, n \neq 0, m \neq \pm n$
24. $\left(\frac{x - x^{-2}}{x^{-2} + x^{-1} + 1} - \frac{x - x^{-1}}{1 + x^{-2} + 2x^{-1}}\right) : \frac{1 - x^{-1}}{1 + x^{-1}}; x \neq 0$
25. $\left(\frac{x + x^{-1} - 1}{x + x^{-2}} - \frac{x - x^{-1}}{x + x^{-1} + 2}\right) : \frac{x^{-1}}{1 + x^{-1}}; x \neq 0$
26. $\frac{a^{-2} + b^{-2}}{a^{-1} + b^{-1}} \cdot \left(\frac{a^2 + b^2}{ab}\right)^{-1} : \frac{a^{-1} - b^{-1}}{a^2 - b^2}; a, b \neq 0, a \neq \pm b$
27. $\left(\frac{x^{-1} + y^{-1}}{yx^{-1} + xy^{-1}}\right)^{-1} + \left(\frac{x^{-1} + y^{-1}}{2}\right)^{-1} - \frac{x^{-1} - y^{-1}}{x^{-1}y^{-1}}, (xy \neq 0, x \neq \pm y)$

КОРЕНОВАЊЕ

1. Израчунати:

а) $25^{\frac{1}{2}}$

б) $4^{-0,5}$

в) $4^{\frac{1}{2}} + 8^{\frac{1}{3}} - 9^{-\frac{1}{2}}$

г) $\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}}$

д) $\sqrt[3]{-27}$

ђ) $\left[\left(\frac{3}{7} + \frac{2}{3} : \frac{3}{5}\right) : \left(13 + \frac{6}{7}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$

е) $x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{-\frac{3}{4}}$

ж) $\sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x}}$

з) $\sqrt[5]{a^2 \cdot \sqrt{a}} \quad \boxed{\sqrt{a}}$

и) $\sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x \cdot \sqrt[4]{x \cdot \sqrt[5]{x}}}}$

ј) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} + \sqrt{1\frac{9}{16}}$

к) $\sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}$

л) $2\sqrt{18} + 3\sqrt{8} - \sqrt{50} + 3\sqrt{32}$

љ) $\sqrt{\frac{3x^6}{25z^{10}}}$

м) $4^{\frac{1}{2}} + 8^{\frac{1}{3}} + 16^{\frac{1}{4}} + 32^{\frac{1}{5}} - 25^0$

2. Рационалисати:

а) $\frac{6}{\sqrt{3}}$

б) $\frac{12}{\sqrt[3]{2}}$

в) $\frac{a}{\sqrt[5]{a^3}}$

г) $\frac{7}{2+\sqrt{3}}$

д) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

3. Израчунати I^2 , ако је: $I = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} + \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$

$\boxed{1}$

4. Применом Лагранжевог идентитета одредити:

а) $\sqrt{7+\sqrt{48}}$

б) $\sqrt{3-\sqrt{5}}$

5. Израчунати:

а) $\sqrt[3]{x^{-1} \cdot \sqrt{x}} \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x^{-1}}}$

б) $\sqrt[9]{\frac{a^{17}b^3c^5}{x^8y^5}} : \sqrt[9]{\frac{a^8c^5x}{b^6y^5}}$

в) $\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}} + \frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}$

г) $\sqrt[5]{a \cdot \sqrt[3]{b^8}} \cdot \sqrt[5]{a^3 \cdot \sqrt[3]{a^2}} \cdot \sqrt[5]{b^2 \cdot \sqrt[3]{ab}}$

6. Одредити: $x^2 - 2x - 1$ за: $x = 1 + \sqrt{2}$

7. Доказати да је: $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = 10$

8. Упростити изразе:

а) $\frac{1}{3\sqrt{2}-2}$

б) $\frac{8}{3-\sqrt{5}} - \frac{2}{2+\sqrt{5}}$

в) $\sqrt{8-2\sqrt{15}}$

г) $\sqrt[3]{5-\sqrt{17}} \cdot \sqrt[3]{5+\sqrt{17}}$

9. Ако је $b = \frac{2}{3-\sqrt{5}}$, израчунати $\frac{b-1}{b^{-1}}$.

10. Упростити изразе:

а) $\left(\sqrt[3]{xy \cdot \sqrt{x}}\right) : \left(\sqrt[5]{x \cdot \sqrt{x^3 \cdot y}}\right)$

б) $\left(\frac{3\sqrt{b}}{\sqrt{b}-1} - \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{b}+1} - \frac{b}{b-1}\right) \cdot \frac{b-1}{\sqrt{b}} \quad (b > 0, \quad |b| \neq 1)$

в) $\left[16^{\frac{1}{8}} + \left(27^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] \cdot \left[2^{0,5} - \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]$

г) $\frac{\left(x \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot y^3}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^{15} \cdot y^{24}}}}$

д) $\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1} + \frac{4}{\sqrt{6}-2} - \frac{12}{3-\sqrt{6}}\right) \cdot (\sqrt{6}+11)$

ђ) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{2\sqrt{x}}{x-1}\right) \cdot \left(\frac{10}{\sqrt{x}+1}\right)^{-1}, (x \geq 0, \quad |x| \neq 1)$

11*. Рационалисати:

$$\text{a)} \frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$$

$$\text{б)} \frac{8}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}$$

$$\text{г)} \frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}$$

$$\text{д)} \frac{8}{\sqrt{15} + \sqrt{5} - \sqrt{3} - 1}$$

12. Доказати да је:

$$\text{a)} \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{6 - 4\sqrt{2}} = 1$$

$$\text{б)} \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} = 1$$

13. Упростити изразе:

$$\text{a)} \sqrt[6]{\frac{a^2 - 4ax + 4x^2}{ab + 2bx}} : \sqrt[3]{\frac{ab + 2bx}{(a - 2x)^2}} : \sqrt[4]{\frac{a^2 - 4x^2}{b^2}}$$

$$\text{б)} \sqrt{4 + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}$$

$$\text{в)} \sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}}$$

$$\text{г)} \left\{ 1 + \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y}{x} \right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{y} \right)^{-\frac{1}{2}} \right]^{-2} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{д)} \sqrt[12]{x^{11}} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot \left(\sqrt[3]{x^2} \right)^4 : \left(\sqrt{x^{-1}} \right)^7$$

$$\text{ђ)} \sqrt{3 - \sqrt{3} + \sqrt{2 + 2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{18 - 8\sqrt{2}}}}}$$

$$\text{е)} x \cdot \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2y\sqrt{x}} \right)^{-1} + y \cdot \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2x\sqrt{y}} \right)^{-1}$$

$$\text{ж)} \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}}{x - \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} + y}$$

$$14. \text{ Ако је: } a = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}, \quad b = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \text{ израчунати: } \left[(a + a^{-1}) + (b + b^{-1}) \right]^{\frac{1}{2}}$$

КОМПЛЕКСНИ БРОЈЕВИ

1. Израчунати:

а) $\sqrt{-4} + \sqrt{-9} - \sqrt{-16} + \sqrt{-1}$

в) $(2-3i) - (3+2i)$

д) $(1+i)^2$

е) $(2-3i) \cdot (-5+4i)$

з) $\frac{1+i}{1-i}$

б) $i^2 + i^3 - i^4 - i^5$

г) $(1-i) \cdot (1+i)$

ђ) $(1-i)^2$

ж) $i^{125} - i^{35} + i^{1000} - i^{-2}$

и) $\frac{3-2i}{1+i}$

2. Одредити реални и имагинарни део, модул комплексних бројева као и конјуговано-комплексни број бројевима:

а) $z_1 = 7 - 3i$

б) $z_2 = -3 + 4i$

в) $z_3 = -5i$

г) $z_4 = 8$

3. Ако су $z_1 = 2 + 5i$, $z_2 = 1 - 3i$, одредити: $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2 \wedge \frac{z_1}{z_2}$.

4. Решити једначине: а) $x^2 + 4 = 0$

б) $-25 \cdot x^2 = 9$

5. Дати су комплексни бројеви: $z_1 = 3 - 2mi$ и $z_2 = 4n + 5i$. Одредити реалне бројеве m и n тако да дати комплексни бројеви буду једнаки.

4. Израчунати: $\frac{i^{103} + i^{1000}}{i^{200} - i^9}$

5. Израчунати:

а) $(1+i)^{100} + (1-i)^{100}$

б) $\frac{1}{2-i} + \frac{1}{1-2i}$

в) $\frac{(1+i) \cdot (3+2i)}{2+i}$

г) $\frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i} + i^{24} + i^{33} - i^{102} + i^{1003}$

6. Решити једначине:

а) $(2+3i) \cdot x + (3+2i) \cdot y = 1 - i$

б) $(2+i) \cdot z = 5 + 4i$

7. Одредити реални и имагинарни део, као и модул комплексног броја:

а) $\frac{(1+i)^{13}}{(1-i)^7}$

б) $\frac{5-i}{3+2i}$

в) $\frac{(1+i) \cdot (2-i)}{3-i}$

8. Одреди модул комплексног броја: $z = \frac{3+i}{(2-i)^2}$

9. Одредити $z=x+iy$ ако је:

а) $(3+i) \cdot x + (1+i) \cdot y = 7 + i$

б) $2x - i + 3i \cdot (y + 2i) = 4 + 5i$

10. Решити једначине:

а) $2z(3-5i) + z - 1 = -30 - 65i$

б) $z + \bar{2z} = 12 - i$

11. Израчунати: $(2-3i) \cdot (3+4i) + \frac{1-i}{1+i} + (2+i)^2 + (1+i)^4$

12. Израчунати: $\frac{(1+i)^{100}}{(1-i)^{96} - i \cdot (1+i)^{98}}$

13. Доказати да је: $z = \frac{(1+i)^6 - (1-i)^6}{(1-i)^6 \cdot (1+i)^6}$ имагинаран број.

14. Одредити комплексан број z ако је: $\operatorname{Re}(z) = \sqrt{2}$, $|z| = \sqrt{3}$

15. Израчунати: $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{100} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{100}$

16. Доказати да је: $(\sqrt{2} + i)^6 + (\sqrt{2} - i)^6 = -46$

17. Дат је комплексан број: $z_1 = 2 + i$. Одредити комплексан број $z = x + iy$ ако је:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z}{z_1}\right) = -\frac{3}{5}, \quad \operatorname{Im}(z_1 \cdot \overline{z}) = 1$$

18 Решити једначине:

а) $|z| - z = 1 + 2i$ б) $|z + 1| + z + i = 0$ в) $z^2 = 3 + 4i$

19. Доказати да је:

а) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3 + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 2$ б) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^4 + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^4 = -1$

20. Израчунати: $\left(\frac{3}{1+i} + \frac{1+i}{2i}\right)^{16}$

21. Одредити модул комплексног броја: $z = \frac{(1+i)^{200} \cdot (6+2i) - (1-i)^{198} \cdot (3-i)}{(1+i)^{196} \cdot (23-7i) + (1-i)^{194} \cdot (10+2i)}$

22. Одредити комплексан број $z = x + iy$ који задовољава услов:

$$\left|\frac{z-3}{2-z}\right| = 1 \quad \wedge \quad \operatorname{Re}\left(\frac{z}{2+i}\right) = 2$$

23. Ако је: $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ доказати да је:

а) $(1+z^2)^4 = z$ б) $(1+z-z^2) \cdot (1-z+z^2) = 4$