

Ваљак

ТРЕБА ЗНАТИ:

ВАЉАК

$$P=2B + M \quad V= B \cdot H$$

$$B= r^2\pi \quad M=2r\pi \cdot H$$

$$P_{\text{осн.пресека}} = 2r \cdot H$$

ЗАДАЦИ:

1. Површина омотача ваљка је $144\pi \text{ cm}^2$, а висина ваљка је два пута већа од полупречника. Израчунати запремину ваљка. 432π
2. Осни пресек ваљка је квадрат површине 100 cm^2 . Израчунати површину и запремину ваљка. $150\pi, 250\pi$
3. Правоугаоник страница 8 cm и 12 cm ротира за 360° степени око дуже странице. Израчунати површину и запремину тела. $320\pi, 768\pi$
4. Полупречник и висина ваљка су у размери $2:5$. Ако је висина ваљка 15 cm , израчунати његову запремину. 540π
5. Површина омотача и површина базе ваљка су у размери $6:1$. Наћи запремину ваљка ако је његова површина $200\pi \text{ cm}^2$. 375π
6. Висина правог ваљка је за 10 cm већа од полупречника основе док је површина тела $144\pi \text{ cm}^2$. Наћи запремину тела. 224π
7. Краћа страница правоугаоника је 5 cm , а дијагонала 13 cm . Израчунати површину и запремину тела које настаје обртањем правоугаоника око његове дуже странице. $170\pi, 300\pi$
8. Наћи запремину ваљка површине $180\pi \text{ cm}^2$ ако је разлика висине и полупречника основе 3 cm . 324π
9. Наћи површину и запремину ваљка ако је збир дужина пречника основе и висине ваљка 27 cm , а површина осног пресека 180 cm^2 . $252\pi, 540\pi, \dots$
10. Израчунати површину шупљег ваљка чија је висина 25 cm , полупречник спољњег омотача 15 cm , а унутрашњег 6 cm . 1428π
11. Основа призме је једнакокраки трапез основца 8 cm и 2 cm . У призму је уписан ваљак. Израчунати размеру запремина ваљка и призме ако је висина тела једнака краку трапеза. $\pi:5$
12. У праву тространу призму чија је основа правоугли троугао са катетама 6 cm и 8 cm уписан је и око ње описан ваљак. Наћи однос запремина тих ваљака. $4:25$

Купа и зарубљена купа

ТРЕБА ЗНАТИ:

КУПА	ЗАРУБЉЕНА КУПА
$P=B+M$ $V=\frac{1}{3}B \cdot H$ $B=r^2\pi$ $M=r \pi \cdot s$	$P=B_1+M+B_2$ $V=\frac{\pi \cdot H}{3} \cdot (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$ $M=\pi s \cdot (r_1+r_2)$

ЗАДАЦИ (КУПА):

1. Израчунати површину праве купе чија је запремина $3\pi \text{ cm}^3$, а површина њене основе $3\pi \text{ cm}^2$.
2. Запремина праве купе је $800\pi \text{ cm}^3$. Израчунати површину купе ако су пречник основе и висина у размери **5:6**. 360π
3. Обим основе купе је $6\pi \text{ cm}$, а висина је 4 cm . Израчунати изводницу, површину и запремину купе.
4. Површина праве купе је $90\pi \text{ cm}^2$, а површина основе је $25\pi \text{ cm}^2$. Израчунати запремину купе.
5. Ако је дужина пречника праве купе 18 cm , а површина купе је $216\pi \text{ cm}^2$, израчунати површину осног пресека купе. 108
6. Израчунати површину праве купе ако се зна да је њен осни пресек једнакостранични троугао површине $16\sqrt{3} \text{ cm}^2$. 48 π
7. Права купа је описана око правилне четворостране пирамиде. Висина пирамиде је 7 cm , а запремина 70 cm^3 . Израчунати изводницу купе. 8
8. Израчунати површину и запремину купе ако је њена изводница за 1 cm дужа од висине, а пречник основе је 1 dm . 90π, 100π
9. Однос полупречника основе и висине купе је **3:4**. Ако је површина омотача купе $60\pi \text{ cm}^2$, израчунати запремину купе. 96π
10. Површина праве купе је $24\pi \text{ cm}^2$, а површина њеног омотача $15\pi \text{ cm}^2$. Наћи запремину купе. 12π
11. Површина праве купе је $96\pi \text{ cm}^2$, а изводница 10 cm . Одредити запремину купе. 96π
12. Правоугли троугао чије су катете 15 cm и 20 cm ротира око своје хипотенузе. Наћи запремину добијеног тела. 1200π

ЗАДАЦИ (ЗАРУБЉЕНА КУПА):

1. Израчунати површину и запремину зарубљене купе ако су површине њених основа $25\pi \text{ cm}^2$ и $4\pi \text{ cm}^2$, а површина омотача $35\pi \text{ cm}^2$. 64 π, 52 π
2. Правоугли трапез основица 10 cm и 2 cm ротира око мањег крака. Израчунати површину и запремину насталог тела ако је висина трапеза 15 cm .
3. Дата је површина зарубљене купе $216\pi \text{ cm}^2$, разлика полупречника основе је 5 cm , и изводница купе 13 cm . Одредити запремину зарубљене купе. 388 π
4. Полупречници основа и изводница зарубљене купе стоје у размери **3:11:17**. Израчунати површину зарубљене купе ако је њена запремина $815\pi \text{ cm}^3$. 368 π
5. Израчунати запремину праве зарубљене купе ако је површина омотача једнака збиру површина основа, чији су полупречници 6 cm и 3 cm . 84 π
6. Полупречници основа и изводница зарубљене купе односе се као **1:2:5**. У ком односу стоје површина омотача и површина зарубљене купе? 3:4
7. Права купа и права зарубљена купа имају једнаке висине и запремине. Ако су полупречници основа зарубљене купе 3 cm и 5 cm наћи полупречник основе купе. 7

Сфера и лопта

ТРЕБА ЗНАТИ:

ЛОПТА

R - полупречник лопте

$$P = 4 R^2 \pi \quad V = \frac{4}{3} R^3 \cdot \pi$$

ЗАДАЦИ:

1. Обим великог круга лопте је 36π cm. Израчунати запремину лопте. 7776π
2. Пречник лопте од пластелина је 8 cm. Ако се од те лопте направи купа чији је пречник основе једнак пречнику лопте, колика је висина купе? 16
3. Висина правилне четворостране призме је 2 cm, а основна ивица је 4 cm. Одредити полупречник лопте описане око призме. 3
4. За бојење дрвене кугле пречника 16 cm утрошено је 32 g боје. Колико је боје потребно за бојење 10 кугли пречника 2 dm? 500
5. У лопту површине πm^2 уписан је ваљак, чији осни пресек има површину $48 dm^2$. Одредити површину и запремину ваљка.
6. Посуда облика ваљка, полупречника основе 5 cm, испуњена је водом до $\frac{11}{12}$ њене висине. Ако се у ту посуду потопи лопта полупречника 2.5 cm, ниво воде достиже врх те посуде. Колика је висина те посуде? 10
7. У праву призму чија је основа троугао страница 28 cm, 25 cm и 17 cm уписана је лопта. Наћи површину лопте. 144π
8. У купу чији је осни пресек једнакостранични троугао уписана је лопта. Наћи запремину купе, ако је запремина лопте $\frac{32}{3}\pi cm^3$. 24π

Детерминанте

ТРЕБА ЗНАТИ:

Вредност детерминанте другог реда: $D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Вредност детерминанте трећег реда: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$

Сарусово правило: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$

ЗАДАЦИ:

1. Израчунати вредност детерминанте:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

б) $\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}$

в) $\begin{vmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{vmatrix}$

г) $\begin{vmatrix} a-b & 1 \\ 1 & a+b \end{vmatrix}$

ђ) $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix}$

е) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ 3 & \sqrt{8} \end{vmatrix}$

2. Решити једначине:

а) $\begin{vmatrix} x-4 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$

б) $\begin{vmatrix} x-1 & -5 \\ 1 & x+1 \end{vmatrix} = 0$

в) $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0$

3. Израчунати вредност детерминанте:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

б) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

в) $\begin{vmatrix} -3 & 5 & -2 \\ 5 & -1 & -4 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

4. Решити неједначине:

а) $\begin{vmatrix} 3x-3 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} > 0$

б) $\begin{vmatrix} 2 & x-1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} < 0$

в) $\begin{vmatrix} x+1 & 2 \\ 4 & x-1 \end{vmatrix} \leq 0$

5. Израчунати вредност детерминанте:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & -1 & 1 \end{vmatrix}$

б) $\begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 2a & 1-a & -1 \\ a-2 & 3 & -a \end{vmatrix}$

в) $\begin{vmatrix} 0 & \sin \alpha & \operatorname{ctg} \alpha \\ \sin \alpha & 0 & \sin \alpha \\ \operatorname{ctg} \alpha & \sin \alpha & 0 \end{vmatrix}$

6. Решити једначине:

а) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & -1 \\ x & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$ в) $\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Системи једначина

ТРЕБА ЗНАТИ:

За решавање система линеарних једначина користимо неку од следећих метода:

- метод замене
- метода супротних коефицијената
- графички метод
- Гаусов метод елиминације променљивих
- Крамерова правила

Крамерова теорема: Нека је D детерминанта система, а $D_x, D_y, D_z, \dots$ детерминанте добијене заменом i -те колоне из D слободним коефицијентима. Тада:

1) Ако је $D \neq 0$: систем је одређен и има јединствено решење:

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}, \quad z = \frac{D_z}{D}, \quad \dots$$

2) Ако је $D = 0$ и бар једна од детерминанти различита од нуле, систем је противуречан, немогућ, тј. нема решења.

3) Ако је $D = D_x = D_y = D_z = \dots = 0$ систем може бити или неодређен тј. да има бесконачно много решења, или је немогућ. У овом случају је најбоље тај систем решити Гаусовом методом.

ЗАДАЦИ:

1. Решити систем једначина:

a) $x - 2y = 7$	б) $5x + 2y = 29$	в) $\frac{x+y}{3} + x = -3$
$2x - y = 8$	$3y - x = 1$	$y - \frac{y-x}{5} = -1.2$
г) $3(x-1) + 5(y-1) = -4$	д) $(3x-2) \cdot (2y+3) = (6x-1) \cdot (y+3) - 27$	
$5(x+3) - 3(y+1) = 64$	$(4x+1) \cdot (3y+2) = (2x+5) \cdot (6y-4)$	

2. Применом Крамеровог правила решити системе једначина:

a) $2x - y = 4$	б) $x - 2y = 3$	в) $y + 3x = 5$	г) $2a - b = -5$
$x + y = 5$	$3x + 2y = 13$	$2x - y = 5$	$3a + 2b = 3$

3. Решити систем једначина:

a) $(x+2)^2 - (x-3) \cdot (x+3) - 3(y+5) = 0$	б) $\frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 16$	
$(2y-3)^2 - y \cdot (4y-3) + 4\left(3x-3\frac{3}{4}\right) = 0$	$\frac{5}{x} - \frac{3}{y} = 4$	
$x + 2y + 3z = 1$	$x + y = 7$	
в) $2x + 4y + 6z = 2$	г) $x + z = 22$	д) $y + z = 8$
$3x + 6y + 9z = 5$	$y + z = 28$	$-x + 2z = 7$

5. Гаусовом методом елиминације решити систем једначина:

$$\begin{array}{lll} x + 2y - 5z = 6 & x + 2y + 3z = 1 & -x - 2y + 14z = 8 \\ \text{a) } -2x + y + 2z = 5 & \text{б) } 2x + 4y - 6z = -2 & \text{в) } 2x - 5y + 7z = 9 \\ -3x + 3y - 4z = 8 & -x + 2y + 6z = 4 & 4x - 2y - 3z = 24 \end{array}$$

6. Применом Крамеровог правила решити системе једначина:

$$\begin{array}{lll} x + y + z = 9 & 5x + 2y - 2z = 3 & 3x - 5y + 2z = -5 \\ \text{a) } x + 2y + 3z = 16 & \text{б) } 3x - 4y + 5z = 10 & \text{в) } 6x + 2y - 3z = 23 \\ x + 3y + 4z = 21 & 7x - 3y + 6z = 19 & 4x - 3y - z = 8 \end{array}$$

7. Решити систем једначина:

$$\begin{array}{ll} \frac{6}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 1.1 & \frac{6}{x} + \frac{4}{y} + \frac{5}{z} = 4 \\ \text{a) } \frac{9}{x+y} - \frac{4}{x-y} = -0.1 & \text{б) } \frac{3}{x} + \frac{8}{y} + \frac{5}{z} = 4 \\ & \frac{9}{x} + \frac{12}{y} - \frac{10}{z} = 4 \end{array}$$