

Вектори

ТРЕБА ЗНАТИ:

Уређена тројка међусобно ортогоналних (нормалних) јединичних вектора тзв. ортова $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ је база правоуглог координатног система у простору. База у равни су вектори: $\vec{i}, \vec{j}$. Сваки вектор у простору има координате: x, y, z и може се приказати у облику:

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z) \quad (\text{у равни је } \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} = (x, y))$$

Ако су $M(x_1, y_1, z_1)$ и $N(x_2, y_2, z_2)$ почетна и крајња тачка вектора тада су његове координате: $x = x_2 - x_1$, $y = y_2 - y_1$ и $z = z_2 - z_1$.

$$\text{Интезитет вектора: } |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$\text{Множење вектора скаларом: } \lambda \vec{a} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

$$\text{Збир (разлика) два вектора: } \vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2)$$

Ако је линеарна комбинација неких не-нула вектора једнака нули: $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} + \dots = 0$ тада су ти вектори: линеарно зависни ако је неки скалар различит од нуле; линеарно независни ако су сви скалари једнаки нули.

Ако су у равни два не-нула вектора линеарно зависна онда су они колинеарни (тј. њихове праве-носачи су паралелне).

Ако су у простору три не-нула вектора линеарно зависна онда су они компланарни (тј. припадају једној равни или су паралелне њој).

Скаларни производ два вектора је број: $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$

$$\text{Важи: } \vec{a} \circ \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2; \quad \vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = 0; \quad \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

Векторски производ два вектора је вектор: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ такав да је:

- интезитет: $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha$; важи: $\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$
- вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ је нормалан на раван који чине вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$
- та три вектора су позитивно оријентисана

$$\text{Кординате новог вектора се добијају: } \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$\text{Мешовити производ три вектора је број: } \vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{Површина паралелограма конструисаног над векторима } P = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$\text{Запремина паралелопипеда над трима векторима је: } V = |\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c})|$$

Задаци:

1. Нека су дате тачке $A(2,1,-3)$ и $B(4,-1,-2)$. Одредити векторе $\vec{AB}$, $\vec{BA}$.
2. Израчунати интезитет вектора $\vec{AB}$ ако су му координате крајњих тачака $A(2,1,-3)$ и $B(4,0,-1)$. 3
3. Одредити интезитете (дужине вектора: а) $\vec{a} = (-3,4)$ 5 б) $\vec{b} = (2,-6,9)$ 11
4. Дати су вектори: $\vec{a} = (2,-1)$, $\vec{b} = (-3,2)$ и $\vec{c} = (-1,2)$. Изразити вектор $\vec{c}$ као линеарну комбинацију $\vec{a}$ и $\vec{b}$. $\vec{c} = 4\vec{a} + 3\vec{b}$
5. Одредити скаларни производ вектора $\vec{a} = (3,-2,1)$ и $\vec{b} = (4,-7,-3)$. 23
6. Одредити скаларни производ вектора ако је $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 2$ и угао између њих $\frac{\pi}{3}$. 5
7. Ако су $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ и угао између њих $\frac{\pi}{4}$, израчунати $|\vec{a} \times \vec{b}|$. $3\sqrt{2}$
8. Показати да су следећи вектори компланарни: $\vec{a} = (-1,3,2)$, $\vec{b} = (-3,12,6)$ и $\vec{c} = (2,-3,-4)$.
9. Дате су тачке: $A(2,3,1)$ и $B(3,-1,0)$, $C(-1,-2,1)$ и $D(-3,3,-2)$. Наћи $\vec{AB} + \vec{CD}$.
10. Наћи непознати вектор ако је: $\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c} + 4\vec{x} = \vec{0}$, где су: $\vec{a} = (5,-8,-1)$, $\vec{b} = (2,-1,4)$ и $\vec{c} = (-3,2,-5)$. $(0,1,2)$
11. Доказати да су следећи вектори линеарно зависни (компланарни): $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$ и $\vec{c} = -3\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k}$. Det=0
12. Израчунати скаларни и векторски производ вектора :
а) $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{b} = 4\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}$ б) Ако су $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ и угао између њих $\frac{2\pi}{3}$
13. Показати да су следеће тачке компланарне (припадају истој равни): $A(3,-2,3)$, $B(0,4,9)$, $C(2,0,5)$ и $D(2,-8,-1)$.
14. Израчунати површину паралелограма конструисаног над векторима: $\vec{a} = (1,1,-1)$ и $\vec{b} = (2,-1,2)$. 26
15. Израчунати запремину паралелопипеда кога одређују вектори: $\vec{a} = (1,0,3)$, $\vec{b} = (0,1,2)$ и $\vec{c} = (3,4,0)$. 17
16. Дати су вектори: $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$ и $\vec{c} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Одредити $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}$. $(-7,5,-6)$
17. Одредити угао између вектора: $\vec{a} = (-2,2,-1)$ и $\vec{b} = (-6,3,6)$. $\varphi = \arccos\left(\frac{4}{9}\right)$
18. Израчунати скаларну пројекцију вектора $\vec{a} = (5,2,5)$ на вектор $\vec{b} = (2,-1,2)$. $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = 6$

19. Дати су вектори $\vec{a} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$ и $\vec{b} = (0, 6, -8)$. Одредити њихове интезитете, као и $|\vec{a} - \vec{b}|$.

$$6, 10, 4\sqrt{3}$$

20. Дати су вектори $\vec{a} = (-1, -3, 4)$, $\vec{b} = (3, 2, -3)$ и $\vec{c} = (5, -6, 7)$. Вектор $\vec{c}$ представити као линеарну комбинацију вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. $\vec{c} = 4\vec{a} + 3\vec{b}$

21. Темена троугла су тачке A(2, -3, 1), B(6, -4, 2) и C(-4, 3, 4). Наћи угао код темена А троугла. 135°

22. Ако су $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ јединични вектори координатних оса (ортови), доказати да важе следеће таблице (Кејлијеве) за скаларни и векторски производ:

$\circ$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	1	0	0
$\vec{j}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	0	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	0	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	0

23. Дати су вектори: $\vec{a} = (1, -1, 2)$ и $\vec{b} = (0, 2, 1)$. Одредити угао између вектора $(\vec{a} + \vec{b})$ и $(\vec{a} - \vec{b})$.

$$\varphi = \arccos\left(\frac{1}{11}\right)$$

24. Вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образују угао $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Ако је $|\vec{a}| = \sqrt{3}$ и $|\vec{b}| = 1$, израчунати угао између вектора $(\vec{a} + \vec{b})$ и $(\vec{a} - \vec{b})$. $\varphi = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)$

25. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образују један с другим углове од 60° . Ако је $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$ и $|\vec{c}| = 6$, израчунати интезитет вектора: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. 10

26. Одредити све реалне бројеве x тако да вектори $\vec{a} = (x+3)\vec{i} + x(x+3)\vec{j} + (x+3)\vec{k}$ и $\vec{b} = (x-2)\vec{i} + (x+3)\vec{j} + (x+2)\vec{k}$ буду узајамно нормални, а затим одредити векторе $\vec{a}$ и $\vec{b}$. $0, -3, -4, \dots$

27. Израчунати површину троугла чија су темена тачке: A(-1, 0, -1), B(0, 2, -3) и C(4, 4, 1). 9

28. Одредити реални број x тако да вектори $\vec{a} = (1, x-1, 1)$, $\vec{b} = (3, 1, 2)$ и $\vec{c} = (4, 4, x-1)$ буду компланарни. 1 или 4

29. Одредити запремину паралелопипеда конструисаног над векторима $\vec{a} = (4, 5, -3)$, $\vec{b} = (1, -2, 1)$ и $\vec{c} = (1, 1, 1)$, као и висину паралелопипеда на раван коју граде вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$. $21, \dots$

30. Испитати да ли су линеарно независни вектори $\vec{a} = (3, -2, 1)$, $\vec{b} = (-1, 1, -2)$ и $\vec{c} = (2, 1, -3)$, а затим изразити вектор $\vec{d} = (11, -6, 5)$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. $\boxed{\text{Jesu, Det} \neq 0. \vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}}$

31. Вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ су узајамно ортогонални, а вектор $\vec{c}$ гради са њима угао од 60° . Ако је $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$ и $|\vec{c}| = 8$, наћи $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{b} + 3\vec{c})$. $\boxed{-62}$

32. Наћи површину паралелограма конструисаног над векторима $(2\vec{b} - \vec{a})$ и $(3\vec{a} + 2\vec{b})$, ако је $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 5$, и угао $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$. $\boxed{100\sqrt{2}}$

33. Израчунати запремину тетраедра чија су темена A(2,3,1) и B(4,1,-2), C(6,3,7) и D(-5,-4,8), као и висину из темена D. $\boxed{\frac{154}{3}}$

34. Наћи координате вектора $\vec{x}$ знајући да је он ортогоналан на векторе $\vec{a} = (2, -3, 1)$ и $\vec{b} = (1, -2, 3)$, ако је $\vec{x} \cdot (\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}) = 10$. $\boxed{\vec{x} = (7, 5, 1)}$

35. Дати су вектори: $\vec{a} = (0, 2m, m)$, $\vec{b} = (2, 2, 1)$, $\vec{c} = (-1, -2, -1)$ и $\vec{d} = (m, 0, 1)$. Одредити непознати параметар тако да је: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{d} + 7$. $\boxed{1}$