

МАТЕМАТИЧКА ЛОГИКА – ТАУТОЛОГИЈЕ

1. Одредити истинитосне вредности исказа:

- | | |
|--|--------------------|
| а) 0 је рационалан број | б) 7 је прост број |
| в) π је ирационалан и трансцедентан број | г) $NZS(2,3)=5$ |
| д) $NZD(6,18)=3$ | ђ) $2^3 = 3^2$ |
| е) $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ | ф) $-1 < -2$ |

2. Одредити тачност исказне формуле :

- | | |
|---|---|
| а) $T \wedge \perp \Rightarrow \perp$ | б) $((\perp \wedge T) \vee T) \wedge T \Leftrightarrow T$ |
| в) $(\neg T \wedge \perp) \vee T \Rightarrow \perp$ | г) $((\perp \Rightarrow T) \Rightarrow T) \Leftrightarrow \perp$ |
| д) $(T \wedge \perp) \Rightarrow (\perp \vee T)$ | ђ) $[(T \wedge T) \Rightarrow (\perp \vee \perp)] \Leftrightarrow (T \wedge \perp)$ |
| е) $(T \vee \perp) \Leftrightarrow (\perp \Rightarrow T)$ | ж) $[(\perp \vee T) \wedge (T \Rightarrow T)] \Leftrightarrow (T \vee \perp)$ |

3. Испитати да ли је исказна формула таутологија:

- | | |
|--|--|
| а) $p \vee \neg p$ (закон искључења трећег) | б) $(p \vee q) \Leftrightarrow \neg q$ |
| в) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$ | д) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ |

4. Дати су искази:

$$p \equiv \frac{1}{2} - \frac{1}{3} : \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}; \quad q \equiv \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{10}{3} \quad r \equiv \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) : \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{37}{6}$$

Одредити њихову тачност, а затим истинитосну вредност исказа: $(\neg p \wedge q) \Rightarrow r$

5. Доказати таутологију:

- а) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ б) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ в) $[\neg p \wedge (q \wedge \neg q)] \Rightarrow p$

6. Испитати да ли је следећа исказна формула таутологија: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$.

7. Дати су искази: $p \equiv \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = 1\frac{1}{6}$, $q \equiv 2,5 - \frac{1}{2} + 1,5 \cdot 10 = 17$ и $r \equiv 3\% = 0,03$. Одредити истинитосну вредност следећег исказа: $p \Rightarrow [q \vee \neg(r \wedge p)]$.

8. Испитати да ли су следеће исказне формуле таутологије:

- а) $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$
 б) $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)] \Rightarrow [p \Rightarrow (q \wedge r)]$
 в) $(p \Rightarrow r) \Rightarrow [((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \Rightarrow r]$
 г) $(p \vee q) \wedge \neg(p \vee r) \Leftrightarrow (q \wedge \neg p) \wedge (q \wedge \neg r)$
 д) $[p \Rightarrow (q \wedge r)] \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$

9. Дати су искази: $p \equiv \frac{2\frac{5}{8} - \frac{2}{3} \cdot 2\frac{5}{14}}{\left(3\frac{1}{12} + \frac{35}{8}\right) : 19\frac{8}{9}} = 2\frac{17}{21}$, $q \equiv 1 + \frac{2}{5} : \frac{7}{10} - \frac{3}{7} = 1\frac{1}{7}$ и $r \equiv 16^5 : 32^3 = 2^5$. Наћи

$$\tau[(\neg p \Rightarrow q) \wedge (p \vee r)]$$

10. Одредити:

$$\tau\left[\left\{\left[(32^2 - 19^2) : (28^2 - 23^2) = \frac{13}{5}\right] \vee [(84^2 - 48^2) : (110^2 - 22^2) = 2]\right\} \Rightarrow \left[\left(0,9 \cdot 12 + 16\frac{1}{5} - 1,8 \cdot 5\right) : 1,8 = 10\right]\right]$$

СКУПОВИ

1. Дати су скупови: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \wedge B = \{1, 3, 5, 7\}$. Одредити: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \Delta B$ а затим их представити Веновим дијаграмом и наћи $P(A \cap B)$.
2. У једном одељењу са 30 ученика су сви ученици у кошаркашкој или одбојкашкој секцији. Ако је у кошаркашкој 17, а у одбојкашкој 19, колико ученика је у обе секције?
3. Ако је скуп А скуп свих парних бројева прве десетице, а В скуп свих непарних бројева прве десетице, наћи: $A \cap B$, $A \times B$, као и партитивни скуп скупа А.
4. У једној породици је било много деце. Седморо њих воли купус, 6 шаргарепу, 5 кромпир, 4 купус и шаргарепу, 3 купус и кромпир, 2 шаргарепу и кромпир. Само једно дете воли и купус и шаргарепу и кромпир. Колико је деце у тој породици?
5. У једном одељењу од 31 ученика 19 је одговарало математику, 17 физику, 11 хемију. 12 ученика је одговарало математику и физику, 7 математику и хемију, 5 физику и хемију, а 2 ученика сва три предмета. Колико је ученика одговарало хемију а не и математику, а колико је ученика одговарало само један предмет? Колико ученика није одговарало?
6. Дати су скупови: $A = \{x | x \in N, (x | 15)\}$, $B = \{x | x \in Z, -2 \leq x < 3\}$ и $C = \{x | (x = 10\% \text{ од } 30) \vee [x^2 - (x - 7) = (x + 1)^2]\}$. Одредити: $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
Доказати скуповну једнакост: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
7. Одредити скуп А тако да важи: $A \cap \{1, 3, 6, 9\} = \{3, 6\}$, $A \cup \{2, 3, 9, 11\} = \{2, 3, 5, 6, 9, 11\}$, $A \subseteq \{3, 5, 6, 7, 9, 11\}$ и $\{6, 11\} \subseteq A$. Затим одредити а тако да је $A \setminus \{1, 2, 6, 11\} = \{a, 3\}$.
8. У једном преводилачком одељењу ради 30 преводилаца. Међу њима 13 говори руски, 12 француски, 17 енглески. Даље, руски и енглески говоре 5, руски и француски 5, а енглески и француски такође 5.
а) Колико преводилаца говоре сва три језика?
б) Колико њих говори само руски?
9. Доказати скуповне једнакости:
а) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.
б) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

ФУНКЦИЈЕ

1. Ако је дата реална реална функција $f(x) = 3x - 4$, наћи: нулу те функције, $f(0)$, $f(3)$, $f(-2)$, $f(x+1)$ и $f(2-t)$.
2. Нека је f пресликавање скупа $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ на скуп $\{a, b, c, d\}$: $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ d & c & b & a & b & c \end{pmatrix}$.
Одредити $f(3)$, $f(1)$. Наћи x за које је $f(x) = c$.
3. Дата је реална функција $f(x) = x^2 + 2x - 5$. Одредити: $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(x-2)$.
4. Дате су функције $f(x) = 2 - 3x$ и $g(x) = 2x + 3$. Наћи $f^2(x)$, $g^2(x)$, $f(g(x))$, $g(f(x))$.
5. Решити функционалну једначину: $f(x+1) = 2x - 3$
6. Дате су функције $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Одредити: $f^2(x)$, $g^{-1}(x)$, $f(g(x))$, $g(f(x))$.
7. Дата је реална функција $f(x) = 3x - 4$. Одредити инверзну функцију $f^{-1}(x)$.
8. Решити функционалне једначине: а) $f(x-3) = \frac{2x+1}{2-3x}$; б) $f(2x-3) = 5 - 4x$.

9. Дата су пресликавања: $f(x) = 4x - 1$, $g(x) = 3 - 2x$. Наћи сложено пресликавање: $f^{-1} \circ g(x)$.
10. Одредити инверзну функцију функције $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.
11. Решити функционалне једначине: $f(x+3) = 2x-1$ и $g(3x+2) = 5-x$ а затим наћи $g \circ f(x) = g(f(x))$.
12. Решити функционалну једначину: $f\left(\frac{x+5}{2x-1}\right) = x+4$
13. Решити функционалну једначину: $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{x-2}{x+2}$.
14. Решити функционалну једначину: $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x$
15. Решити функционалну једначину: $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

КОМБИНАТОРИКА

1. Одредити све пермутације скупа $\{2,4,6\}$.
2. Одредити варијације друге класе од елемената: $\{1,2,3,4,5\}$ са и без понављања.
3. Одредити број комбинација треће класе од 8 елемената.
4. Решити једначину: а) $x! = 120$ б) $V_2^x = 42$.
5. Колико има премутација непарних цифара које почињу са 73 ?
6. Колико пермутација без понављања елемената 1,2,3, ..., 9 почиње са 967 у
а) датом б) произвољном поретку ?
7. Колико има лото комбинација, при чему бирамо 7 од 39 бројева?
8. Од 15 такмичара на турниру свако игра по један меч са преосталим такмичарима. Колико ће бити одиграно мечева ?
9. Петнаест ученика међусобно размењује фотографије. Колико је укупно размењених фотографија?
10. У одељењу има 13 девојчица и 10 дечака. За савет ученика треба изабрати четири ученика од којих је бар једна девојчица. На колико начина се то може урадити?
11. Решити једначине: а) $C_2^n = 15n$ б) $V_3^n = 120$ в) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30$
12. На шаховском турниру одиграно је 45 партија. Ако је сваки шахиста одиграо партију са сваким учесником, одредити број учесника.